3 Tuletise rakendusi

Tuletise rakenduste teoreetiliseks aluseks on kolm teoreemi: Rolle'i, Cauchy ja Lagrange'i teoreemid.

3.1 Rolle'i teoreem

Esmalt tõestame ühe abiteoreemi, nn Fermat' lemma.

Fermat' lemma. Kui funktsioon $f(x)$ on diferentseeruv punktis $\xi \in (a;b)$ ja funktsioonil on selles punktis maksimum (miinimum), siis $f'(\xi) = 0$.

Tõestus. Kui funktsioonil $f(x)$ on maksimum punktis $\xi \in (a;b)$, siis leidub niisugune ümbrus $(\xi-\varepsilon;\xi+\varepsilon)$, et mis tahes $\xi+\Delta x \in (\xi-\varepsilon;\xi+\varepsilon)$ korral $f(\xi+\Delta x) < f(\xi)$ ehk $f(\xi+\Delta x)-f(\xi) < 0$. Kui $\Delta x > 0$, siis $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} < 0$, seega

$$\lim_{\Delta x\to 0+} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \leq 0. \tag{3.1}$$

Kui $\Delta x < 0$, siis $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} > 0$, seega

$$\lim_{\Delta x\to 0-} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \geq 0. \tag{3.2}$$

Eelduse järgi $f(x)$ on diferentseeruv punktis ξ, st eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}.$$

Järelikult on ühepoolsed piirväärtused (3.1) ja (3.2) võrdsed, mis on võimalik ainult siis, kui need mõlemad võrduvad nulliga. Siis ka $f'(\xi) = 0$.

Kui funktsioonil on punktis $\xi \in (a;b)$ miinimum, on tõestus analoogiline.

Punkti ξ, mille korral $f'(\xi) = 0$, nimetatakse funktsiooni *statsionaarseks punktiks.*

Teoreem (Rolle'i teoreem). Kui lõigul $[a;b]$ pideva ja vahemikus $(a;b)$ diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ väärtused lõiguotspunktides on võrdsed, st $f(a) = f(b)$, siis leidub vahemikus $(a;b)$ vähemalt üks funktsiooni $f(x)$ statsionaarne punkt.

Tõestus. Kui funktsioon on lõigul $[a;b]$ konstantne, siis $f'(x) = 0$ iga $x \in (a;b)$ korral, st kõik vahemiku $(a;b)$ punktid on funktsiooni $f(x)$ statsionaarseteks punktideks.

Lõigul pidev funktsioon omab suurimat ja vähimat väärtust sellel lõigul. Mittekonstantse funktsuiooni korral peab vähemalt üks neist väärtustest erinema väärtusest $f(a) = f(b)$. Oletame konkreetsuse mõttes, et funktsioon omandab suuurima väärtuse mingisuguses punktis $\xi \in (a;b)$. Selles punktis on sel juhul täidetud Fermat' lemma eeldused, seega $f'(\xi) = 0$.

3.2 Cauchy teoreem

Teoreem (Cauchy teoreem). Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on pidevad lõigul $[a;b]$ ja diferentseeruvad vahemikus $(a;b)$ ning $g'(x) \neq 0$ vahemikus $(a;b)$, siis leidub vähemalt üks punkt $\xi \in (a;b)$, et

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{3.3}$$

Tõestus. Eeldustest järeldub, et $g(a) \neq g(b)$, sest vastasel korral rahuldaks funktsioon $g(x)$ Rolle'i teoreemi eeldusi. Rolle'i teoreemi kohaselt peaks vahemikus $(a;b)$ leiduma punkt ξ, milles $g'(\xi) = 0$, mis on eeldusega vastuolus.

Konstrueerime funktsiooni

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ pidevusest lõigul $[a;b]$ järeldub funktsiooni $F(x)$ pidevus sellel lõigul ning $f(x)$ ja $g(x)$ diferentseeruvusest vahemikus $(a;b)$ funktsiooni $F(x)$ diferentseeruvus selles vahemikus. Peale selle

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(a) - g(a)] = 0$$

ja

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0,$$

st funktsiooni $F(x)$ väärtused lõigu otspunktides on võrdsed. Seega rahuldab funktsioon $F(x)$ Rolle'i teoreemi eeldusi, järelikult leidub vähemalt üks punkt $\xi \in (a;b)$, et $F'(\xi) = 0$, st

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0$$

ehk

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi),$$

millest, pärast jagamist suurusega $g'(\xi)$ saamegi teoreemi väite.

3.3 Lagrange'i teoreem

Teoreem (Lagrange'i teoreem). Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a;b]$ ja diferentseeruv vahemikus $(a;b)$, siis leidub vähemalt üks punkt $\xi \in (a;b)$, et

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi). \tag{3.4}$$

Tõestuseks piisab, kui võtame Cauchy teoreemis $g(x) = x$, sest siis $g(b) = b$, $g(a) = a$ ja $g'(x) = 1$.

3.4 L'Hospitali reegel

L'Hospitali reegel hõlbustab jagatise piirväärtuse

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

arvutamist, kui tegemist on $\frac{0}{0}$- või $\frac{\infty}{\infty}$- tüüpi määramatusega.

Teoreem 1 (L'Hospitali reegel $\frac{0}{0}$- tüüpi määramatuse korral). Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ rahuldavad punkti a mingis ümbruses $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ Cauchy teoreemi eeldusi, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ning eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siis eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tõestus. Funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ pidevuse tõttu a ümbruses $f(a) = g(a) = 0$. Kui $x > a$, siis Cauchy teoreemi põhjal leidub selline $\xi \in (a;x)$ (kui $x < a$, siis $\xi \in (x;a)$), et

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Kui $x \to a$, siis sellest, et $a < \xi < x$ $(x < \xi < a)$ järeldub, et ka $\xi \to a$ ja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sest piirväärtus ei sõltu muutuja tähistusest.

Märkus. Kui $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \lim\limits_{x\to a} g'(x) = 0$ ja funktsioonid $f'(x)$ ning $g'(x)$ rahuldavad Cauchy teoreemi eeldusi punkti a ümbruses, siis saab L'Hospitali reeglit uuesti rakendada:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Teoreem 1 (L'Hospitali reegel $\frac{\infty}{\infty}$- tüüpi määramatuse korral). Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ rahuldavad punkti a mingis ümbruses $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ Cauchy teoreemi eeldusi, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ ning eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siis eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Selle teoreemi eelduse $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ tõttu rahuldavad funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ Cauchy teoreemi eeldusi punkti a mingis ümbruses $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ välja arvatud punktis a.

Märkus. Mõlemas teoreemis võib piirprotsessiks olla ka $x \to \pm\infty$.

Näide 1. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Siin on tegemist $\frac{0}{0}$-tüüpi määramatusega. L'Hospitali reegli järgi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Näide 2. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Ka siin on $\frac{0}{0}$-tüüpi määramatus. L'Hospitali reegli põhjal

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Tekkis uuesti $\frac{0}{0}$-tüüpi määramatus ja teist korda L'Hospitali reeglit rakendades saame

$$... = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

Taas on $\frac{0}{0}$- tüüpi määramatus ja veel kord L'Hospitali reeglit kasutades saame

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Näide 3. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$.

Selles piirväärtusülesandes on $\frac{\infty}{\infty}$- tüüpi määramatus. L'Hospitali reegli kohaselt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x.}$$

Tekkis $\frac{0}{0}$- tüüpi määramatus. Kasutades L'Hospitali reeglit veel kaks korda, saame

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}{3\cdot 2\cos x(-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x\cos 3x}{\sin x\cos x}=\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{-1}{1}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=-1\cdot\frac{3}{-1}=3.\end{aligned}$$

3.5 L'Hospitali reegel teistel määramatuse juhtudel

Selles alampunktis vaatleme L'Hospitali reegli rakendamist juhtudel, kui on määramatus kujul $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ või ∞^0.

Kõigil vaadeldavatel juhtudel taandatakse piirväärtuse leidmine kas $\frac{0}{0}$- või $\frac{\infty}{\infty}$- tüüpi määramatusele.

Määramatus kujul $0\cdot\infty$ on piirväärtuses $\lim\limits_{x\to a} yz$, kus $\lim\limits_{x\to a} y=0$ ja $\lim\limits_{x\to a} z=\infty$.

Sel juhul saame kirjutada kas $y\cdot z=\dfrac{y}{\frac{1}{z}}$ või $y\cdot z=\dfrac{z}{\frac{1}{y}}$. Esimesel juhul $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{z}=0$ ja teisel juhul $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{y}=\infty$. Seega esimesel viisil on piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} yz$ taandatud $\frac{0}{0}$- tüüpi määramatusele, aga teisel viisil $\frac{\infty}{\infty}$- tüüpi määramatusele.

Näide 1. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0} x^n\ln x$, kui $n\in\mathbb{N}$.

Ilmsellt $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. Piirväärtus tandub $\frac{\infty}{\infty}$-tüüpi määramatusele, kui kirjutada

$$\lim_{x\to 0} x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}}.$$

L'Hospitali reegli põhjal

$$\lim_{x\to 0} x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{-n}=0.$$

Määramatus kujul $\infty - \infty$ on piirväärtuses $\lim\limits_{x\to a}(y - z)$, kui $\lim\limits_{x\to a} y = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to a} z = \infty$.

Avaldis $y - z$ on teisendatav $y - z = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} - \dfrac{1}{\frac{1}{z}} = \dfrac{\frac{1}{z} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}}$.

Antud juhul $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{y} = 0$ ja $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{z} = 0$, seega määramatus tüüpi $\infty - \infty$ on teisendatav $\frac{0}{0}$-tüüpi määramatuseks.

Näide 2. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Mõlema murru nimetaja piirväärtused on nullid, seega on $\infty - \infty$-tüüpi määramatus. Võttes murrud ühisele nimetajale, saame piirväärtuses

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x}$$

määramatuse tüüpi $\frac{0}{0}$. L'Hospitali reegli abil

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1}.$$

Tekkis uuesti piirväärtus, kus on $\frac{0}{0}$-tüüpi määramatus. Kasutades veel kord L'Hospitali reeglit saame, et

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Kui on määramatus tüüpi 0^0, 1^∞ või ∞^0, on kõigil kolmel juhul piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} y^z$. Esimesel juhul $\lim\limits_{x\to a} y = 0$ ja $\lim\limits_{x\to a} z = 0$, teisel juhul $\lim\limits_{x\to a} y = 1$ ja $\lim\limits_{x\to a} z = \infty$ ning kolmandal juhul $\lim\limits_{x\to a} y = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to a} z = 0$.

Kasutades teisendusi $y^z = e^{\ln y^z} = e^{z \ln y}$ ja funktsiooni e^x pidevust, saame kõigil kolmel vaadeldaval juhul piirväärtuse kirjutada kujule

$$\lim_{x\to a} y^z = e^{\lim\limits_{x\to a} z \ln y}. \tag{3.5}$$

Esimesel juhul $\lim\limits_{x\to a} \ln y = -\infty$, st tekib $0 \cdot \infty$ -tüüpi määramatus. Teisel juhul $\lim\limits_{x\to a} \ln y = 0$, tekib samuti $0 \cdot \infty$-tüüpi määramatus. Kolmanal juhul

$\lim\limits_{x\to a} \ln y = \infty$. Seega tekib kõigil kolmel juhul e astendajas piirväärtus, kus on $0 \cdot \infty$ -tüüpi määramatus.

Näide 3. Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x}$.

Antud ülesandes on ∞^0-tüüpi määramatus. Pärast teisendusi

$$\lim_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln \cot x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cot x}{\frac{1}{\sin x}}}$$

saame e astendajas $\frac{\infty}{\infty}$ -tüüpi määramatuse. L'Hospitali reegli põhjal

$$e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cot x}{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cot x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\cos x}} = e^0.$$

Seega $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x} = 1$.

Näide 4. Tõestame L'Hospitali reegli abil, et $\lim\limits_{|x|\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Teadaolevalt on selles ülesandes 1^∞ -tüüpi määramatus. Tõestuse saame teisenduste

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{|x|\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

ja L'Hospitali reegli

$$e^{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}} x = e^{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = e^1 = e$$

abil.

3.6 Taylori valem

Taylori valemit kasutatakse suvalise funktsiooni $y = f(x)$ esitamiseks hulkliikme abil punkti a ümbruses võimalikult suure täpsusega. Kui diferentsiaali abil ligikaudse arvutamise valemis

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

tähistada fikseeritud punkt x asemel a-ga ja muutuv punkt $a + \Delta x$ asemel x-ga, st $x = a + \Delta x$, siis $\Delta x = x - a$ ja

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

kujutab endast funktsiooni ligikaudset esitamist $x-a$ suhtes lineaarse avaldise kaudu. Taylori valemi eesmärgiks on selle täpsustamine, lisades $x-a$ esimest astmet sisaldavale liikmele selle teist kolmandat, jne astet sisaldavad liikmed.

Seega on eesmärgiks funktsiooni $f(x)$ esitamine punkti a ümbruses võimalikult täpselt hulkliikme

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... + c_n(x-a)^n \quad (3.6)$$

abil.

Eeldame, et funtksioonil $f(x)$ on punkti a ümbruses pidevad tuletised kuni $n+1$ järguni ja nõuame, et otsitav polünoom $P_n(x)$ rahuldab punktis a tingimusi

$$\begin{aligned} P_n(a) &= f(a), \\ P_n'(a) &= f'(a), \\ P_n''(a) &= f''(a), \\ P_n'''(a) &= f'''(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Lähtudes tingimustest (3.7), leiame hulkliikme (3.6) kordajad funktsiooni $f(x)$ ja selle tuletiste väärtuste kaudu. Kõigepealt $P_n(a) = c_0$ ja tingimustest (3.7) esimese tõttu

$$c_0 = f(a).$$

Diferentseerides hulkliiget (3.6), saame

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + ... + nc_n(x-a)^{n-1},$$

millest $P_n'(a) = c_1$ ja tingimustest (3.7) teise tõttu

$$c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}.$$

Diferentseerides hulkliiget (3.6) teist korda, saame

$$P_n''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + ... + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

millest $P_n''(a) = 2c_2$ ja tingimustest (3.7) kolmanda tõttu

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}.$$

Diferentseerides hulkliiget (3.6) kolmandat korda, saame

$$P_n'''(x) = 6c_3 + ... + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3},$$

millest $P_n'''(a) = 6c_3$ ja tingimustest (3.7) neljanda tõttu

$$c_3 = \frac{f'''(a)}{6} = \frac{f'''(a)}{3!}.$$

Diferentseerides hulkliiget (3.6) n-ndat korda, saame

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2c_n,$$

millest $P_n^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2c_n$ ja tingimustest (3.7) viimase tõttu

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Seega on tingimusi (3.7) rahuldavaks polünoomiks (3.6)

$$P_n(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{3.8}$$

Seda hulkliiget nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Taylori polünoomiks* punkti a ümbruses või funktsiooni $f(x)$ Taylori polünoomiks $x-a$ astmete järgi. $x-a$ astmete kordajaid $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Taylori kordajateks.*

Näide 1. Arvutame $\sqrt{1,2}$ eimese, teise, kolmanda ja neljanda astme Taylori polünoomi abil. Taskuarvuti abiga $\sqrt{1,2} = 1,095445115$.

Siin $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $x = 1,2$ ja $x-a = 0,2$. Arvutusteks leiame $f(1) = \sqrt{1} = 1$, funktsiooni tuletise $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, millest $f'(1) = \frac{1}{2}$, teise tuletise $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, millest $f''(1) = -\frac{1}{4}$, kolmanda tuletise $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, millest $f'''(1) = \frac{3}{8}$ ja neljanda tuletise $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$, millest $f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$.

Esimese astme Taylori polünoomi abil saame

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 = 1,1.$$

Teise astme Taylori polünoomi abil saame

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 - \frac{\frac{1}{4}}{2!} \cdot 0,2^2 = 1,095.$$

Kolmanda astme Taylori polünoomi abil saame

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 =$$

$$1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 - \frac{\frac{1}{4}}{2!} \cdot 0,2^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!} \cdot 0.2^3 = 1,0955.$$

Neljanda astme Taylori polünoomi abil saame

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4=$$
$$1+\frac{1}{2}\cdot 0,2-\frac{\frac{1}{4}}{2!}\cdot 0,2^2+\frac{\frac{3}{8}}{3!}\cdot 0.2^3-\frac{\frac{15}{16}}{4!}\cdot 0,2^4=1,0954375.$$

Tehtud arvutustest järeldub, et mida kõrgema astme Taylori polünoomi arvutusteks kasutada, seda täpsem funktsiooni väärtus saadakse. Absoluutset täpsust aga üldjuhul ei saavutata. Funktsiooni väärtus ja polünoomi väärtus erinevad teineteisest suuruse

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

võrra. Valemit

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x), \tag{3.9}$$

kus $P_n(x)$ on funktsiooni $f(x)$ Taylori polünoom (3.8), nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Taylori valemiks* ja suurust $R_n(x)$ *Taylori valemi jääkliikmeks.* On võimalik tõestada, et Taylori valemi jääkliige avaldub kujul

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\Theta(x-a)], \tag{3.10}$$

kus $0<\Theta<1$, st $a+\Theta(x-a)$ on mingisugune punkt a ja x vahel.

Taylori valemi jääkliikme absoluutväärtus $|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|$ näitab, kui suur on erinevus väärtuste $f(x)$ ja $P_n(x)$ vahel, st kui suur viga tehakse kasutades funktsiooni väärtuse arvutamiseks Taylori polünoomi (3.8).

Jääkliikme avaldises Θ on konkretiseerimata. Seepärast jääkliikme absoluutväärtust mitte ei arvutata, vaid hinnatakse seda ülaltpoolt.

Näide 2. Hindame ülaltpoolt viga, mis tehakse, kui arvutatakse $\sqrt{1,2}$ kolmanda astme Taylori polünoomi abil.

Selleks peame hindama $|R_3(x)|$ väärtust. Näites 1 saime kolmanda astme Taylori polünoomi abil $\sqrt{1,2}$ väärtuseks $1,0955$. Kasutades näites 1 leitud neljandat tuletist, saame jääkliikme avaldise (3.10)

$$R_3(x)=-\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{15}{16\sqrt{(1+\Theta(x-1))^7}}.$$

Hindame jääkliikme absoluutväärtust

$$|R_3(1,2)|=\left|\frac{0,2^4}{24}\cdot\frac{15}{16\sqrt{(1+0,2\Theta)^7}}\right|,$$

kus $0 < \Theta < 1$. Ilmselt on murd suurim, kui nimetaja on vähim. Nimetaja on vähim, kui $1 + 0,2\Theta$ on vähim, aga viimase vähim väärtus on 1. Seega

$$|R_3(1,2)| < \frac{0,2^4}{24} \cdot \frac{15}{16} = 0,0000625,$$

st viga, mis tehakse $\sqrt{1,2}$ arvutamisel kolmanda astme Taylori polünoomi abil, ei ületa 0,0000625.

3.7 Funktsioonide e^x, $\sin x$ ja $\cos x$ arendid Maclaurini valemi abil

Maclaurini valemiks nimetatakse Taylori valemit x astmete järgi ehk Taylori valemit 0 ümbruses. Maclaurini valemi saame valemist (3.9), asendades selles $P_n(x)$ Taylori polünoomiga (3.8), milles $a = 0$. Seega , Maclaurini valem on

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (3.11)$$

mille jääkliikme avaldiseks saame (3.10) põhjal

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\Theta x), \quad (3.12)$$

kus $0 < \Theta < 1$.

Leiame funktsioonide e^x, $\sin x$ ja $\cos x$ arendid Maclaurini valemi abil.

3.7.1 Funktsioon $f(x) = e^x$

Leiame $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x$, millest $f'(0) = 1$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$, millest $f^{(n)}(0) = 1$. Funktsiooni e^x arendiks Maclaurini valemi (3.11) abil saame

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

ehk

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

mille jääkliikmeks on (3.12) põhjal

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x},$$

kus $0 < \Theta < 1$. Näitame, et iga fikseeritud $x \in \mathbb{R}$ väärtuse korral

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0. \quad (3.13)$$

Fikseeritud x väärtuse korral on $e^{\Theta x}$ tõkestatud suurus,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n+1}.$$

Olgu q mingi väärtus, mis rahuldab tingimusi $0 < q < 1$. Iga sellise q väärtuse korral leidub N, et kui $k > N$, siis $\frac{|x|}{k} < q$. Seega

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\right| \left|\frac{x}{2}\right| \ldots \left|\frac{x}{N}\right| \left|\frac{x}{N+1}\right| \ldots \left|\frac{x}{n+1}\right| <$$
$$< \left|\frac{x}{1}\right| \left|\frac{x}{2}\right| \ldots \left|\frac{x}{N}\right| q \cdot q \cdot \ldots q,$$

milles tegur q kordub $n+1-N$ korda. Seega

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \left|\frac{x}{1}\right| \left|\frac{x}{2}\right| \ldots \left|\frac{x}{N}\right| \cdot q^{n+1-N}$$

Tingimusest $0 < q < 1$ järeldub, et

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1-N} = q^{1-N} \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Järelikult on $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ lõpmatult kahanev suurus ja $R_n(x)$, kui lõpmatult kahaneva suuruse ja tõkestatud suuruse korrutis, on samuti lõpmatult kahanev suurus, st $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Tingimus (3.13) tähendab seda, et iga fikseeritud $x \in \mathbb{R}$ väärtuse korral saame funktsiooni e^x väärtust arvutada Maclaurini valemi abil kui tahes suure täpsusega, võttes selle arendis

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

piisavalt palju liikmeid, st võttes n piisavalt suure.

3.7.2 Funktsioon $f(x) = \sin x$

Eespool on näidatud, et funktsiooni $f(x) = \sin x$ n-ndat järku tuletis $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Leiame $f(0) = 0$, $f'(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $f''(0) = \sin\pi = 0$, $f'''(0) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $f^{(4)}(0) = \sin 2\pi = 0$, $f^{(5)}(0) = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$ jne. Siit järeldub, et kõik funktsiooni $\sin x$ paaris järku tuletised punktis 0 võrduvad 0-ga, paaritut järku tuletised $f^{(2n+1)}(0) = 1$, kui n on paarisarv ja $f^{(2n+1)}(0) = -1$, kui n on paaritu.

Seega funktsiooni $\sin x$ arend Maclaurini valemi (3.11) abil on

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

mille jääkliige on (3.12) põhjal

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin\left(\Theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\pi\right),$$

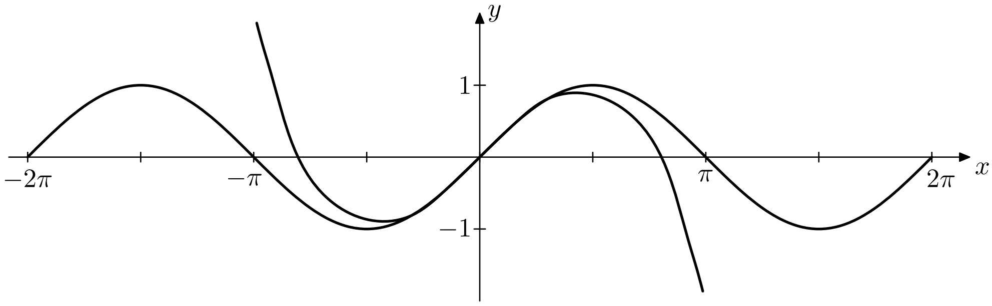
kus $0 < \Theta < 1$. Ka siin on võimalik näidata, et iga fikseeritud $x \in \mathbb{R}$ korral on

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0,$$

st funktsiooni $\sin x$ väärtust on võimalik Maclaurini valemi abil arvutada kui tahes suure täpsusega, võttes arendis

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

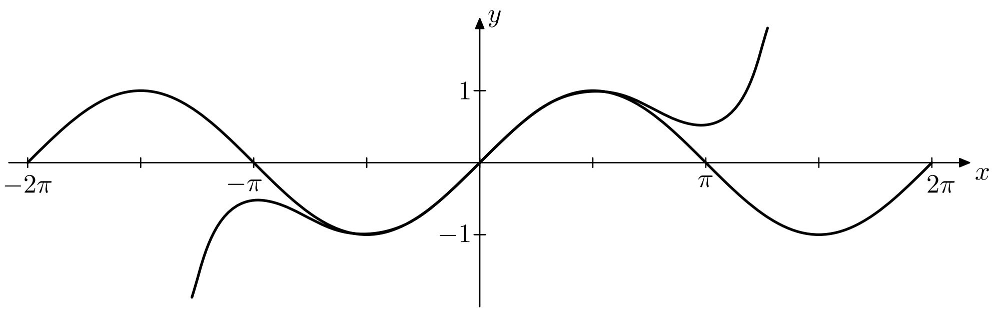
piisavalt palju liikmeid.



Joonis 3.1: Siinusfunktsioon ja kolmanda astme Maclaurini polünoom $y = x - \dfrac{x^3}{6}$

3.7.3 Funktsioon $f(x) = \cos x$

Funktsiooni $f(x) = \cos x$ n-ndat järku tuletis on $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$. Leiame $f(0) = 1$, $f'(0) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $f''(0) = \cos\pi = -1$, $f'''(0) = \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$, $f^{(4)}(0) = \cos 2\pi = 1$ jne. Kõik funktsiooni $\cos x$ paaritut järku tuletised



Joonis 3.2: Siinusfunktsioon ja viienda astme Maclaurini polünoom $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

punktis 0 on võrdsed 0-ga. Paaris järku tuletised $f^{(2n)}(0) = 1$, kui n on paarisarv ja $f^{(2n)}(0) = -1$, kui n on paaritu. Seega funktsiooni $\cos x$ arend Maclaurini valemi (3.11) abil on

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$$

mille jääkliige on (3.12) põhjal

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\left(\Theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

kus $0 < \Theta < 1$. Ka siin iga fikseeritud $x \in \mathbb{R}$ korral

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0,$$

st funktsiooni $\cos x$ väärtust on võimalik Maclaurini valemi abil arvutada kui tahes suure täpsusega, võttes arendis

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

piisavalt palju liikmeid.

Näide. Arvutame $\cos 0,5$ Maclaurini valemi abil, võttes $n = 2$ ja jääkliikme absoluutväärtuse abil hindame maksimaalset viga $(0,5 = 28°38'52'')$.

Arvutame

$$\cos 0,5 \approx 1 - \frac{0,5^2}{2!} + \frac{0,5^4}{4!} = 1 - 0,125 + +0,0026 = 0,8776$$

ja jääkliikme

$$R_4(x) = \frac{x^5}{5!} \cos\left(\Theta x + \frac{5\pi}{2}\right),$$

kus $0 < \Theta < 1$, absoluutväärtuse abil hindame selle arvutuse maksimaalset viga. Et iga $x \in \mathbb{R}$ korral $|\cos x| \leq 1$, siis

$$|R_4(0,5)| = \left|\frac{0,5^5}{5!}\right| \left|\cos\left(0,5\Theta + \frac{5\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{0,5^5}{5!} = \frac{0,03125}{120} = 0,000261.$$

3.8 Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

Teoreem 1. Kui funktsioon $f(x)$ on kasvav piirkonnas X, siis selles piirkonnas $f'(x) \geq 0$.

Tõestus. Kui $\Delta x > 0$, siis $x+\Delta x > x$. Eelduse kohaselt $f(x+\Delta x) > f(x)$, st $\Delta y > 0$ ja $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Kui $\Delta x < 0$, siis $x + \Delta x < x$ ja eelduse kohaselt $f(x + \Delta x) < f(x)$, st $\Delta y < 0$ ja $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Järelikult

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

Teoreem 2. Kui funktsioon $f(x)$ on kahanev piirkonnas X, siis selles piirkonnas $f'(x) \leq 0$.

Tõestus on analoogiline teoreemi 1 tõestusega.

Teoreem 3. Kui $f(x)$ on diferentseeruv piirkonnas X ja $f'(x) > 0$, siis funktsioon $f(x)$ on selles piirkonnas kasvav.

Tõestus. Fikseerime piirkonnas X kaks argumendi väärtust x_1 ja x_2, selliselt, et $x_1 < x_2$. Et funktsioon on diferentseeruv, siis on vahemikus $(x_1; x_2)$ rakendatav Lagrange'i teoreem, mille kohaselt leidub selline $\xi \in (x_1; x_2)$, et

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Eelduse järgi $f'(\xi) > 0$ ja punktide x_1 ja x_2 valiku tõttu $x_2-x_1 > 0$. Järelikult ka $f(x_2) - f(x_1) > 0$, st $f(x_2) > f(x_1)$ ehk funktsioon on kasvav.

Samal viisil on võimalik tõestada järgmine teoreem.

Teoreem 4. Kui $f(x)$ on diferentseeruv piirkonnas X ja $f'(x) < 0$, siis funktsioon $f(x)$ on selles piirkonnas kahanev.

Teoreemid 3 ja 4 võimaldavad leida vastavalt funktsiooni kasvamispiirkonna $X \uparrow$ ja kahanemispiirkonna $X \downarrow$

Näide. Leiame funktsiooni $y = x^2e^{-x}$ kasvamis- ja kahanemispiirkonna.

Funktsiooni määramispiirkond $X = \mathbb{R}$. Leiame tuletise $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$. Teoreemi 3 järgi saame kasvamispiirkonna tingimusest $xe^{-x}(2-x) > 0$ ja teoreemi 4 põhjal kahanemispiirkonna tingimusest $xe^{-x}(2-x) < 0$. Et iga $x \in \mathbb{R}$ korral $e^{-x} > 0$, siis esimene võrratus on samaväärne võrratusega $x(2-x) > 0$ ja teine samaväärne võrratusega $x(2-x) < 0$. Esimese võrratuse lahendihulk on funktsiooni kasvamispiirkonnaks $X \uparrow = (0;2)$ ja teise võrratuse lahendihulk funtksiooni kahanemispiirkonnaks $X \downarrow = (-\infty;0) \bigcup (2;\infty)$.

3.9 Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Definitsioon 1. Öeldakse, et funktsioonil on punktis x_1 lokaalne maksimum, kui sellel punktil leidub selline ümbrus $(x_1-\varepsilon; x_1+\varepsilon)$, et iga $x \in (x_1-\varepsilon; x_1+\varepsilon)$ korral $f(x) < f(x_1)$.

Definitsioon 2. Öeldakse, et funktsioonil on punktis x_2 lokaalne miinimum, kui sellel punktil leidub selline ümbrus $(x_2-\varepsilon; x_2+\varepsilon)$, et iga $x \in (x_2-\varepsilon; x_2+\varepsilon)$ korral $f(x) > f(x_2)$.

Kui tähistada $x = x_1 + \Delta x$, saame tingimuse $f(x) < f(x_1)$ kirjutada $f(x_1+\Delta x) - f(x_1) < 0$ ehk $\Delta y < 0$.

Järeldus 1. Funktsioonil on punktis x_1 lokaalne maksimum, kui funktsiooni muut selles punktis on väikeste argumendi muutude korral negatiivne.

Väike argumendi muut tähendab siin seda, et $x_1 + \Delta x$ peab kuuluma definitsioonis 1 mainitud ümbrusse.

Kui tähistada $x = x_2 + \Delta x$, saame tingimuse $f(x) > f(x_2)$ kirjutada $f(x_2+\Delta x) - f(x_2) > 0$ ehk $\Delta y > 0$.

Järeldus 2. Funktsioonil on punktis x_2 lokaalne miinimum, kui funktsiooni muut selles punktis on väikeste argumendi muutude korral positiivne.

Teoreem 1 (Ekstreemumi olemasoluks tarvilik tingimus). Kui funktsioonil $f(x)$ on punktis x_0 lokaalne ekstreemum, siis $f'(x_0) = 0$ või $f'(x_0)$ ei eksisteeri.

Tõestus. Oletame konkreetsuse mõttes, et funktsioonil on punktis x_0 lokaalne maksimum. Siis järeldus 1 põhjal on $\Delta y < 0$, Kui $\Delta x > 0$, siis $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ ja piirväärtusteoreemi põhjal

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0. \tag{3.14}$$

Kui $\Delta x < 0$, siis $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ ja piirväärtusteoreemi põhjal

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0. \tag{3.15}$$

Ühepoolsed piirväärtused (3.14) ja (3.15) on võrdsed ainult juhul, kui need mõlemad võrduvad nulliga. Aga siis ka

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Kui aga ühepoolsed piirväärtused (3.14) ja (3.15) on erinevad, siis

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

puudub.

Definitsioon 3. Punkti x_0, kus $f'(x_0) = 0$, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *statsionaarseks punktiks.*

Definitsioon 4. Funktsiooni $f(x)$ *kriitiliseks punktiks* nimetatakse selle funktsiooni statsionaarset punkti, või punkti, kus tuletis puudub.

Kasutades viimast definitsiooni, saame ekstreemumi olemasoluks tarviliku tingimuse ümber sõnastada järgmiselt.

Kui funktsioonil $f(x)$ on punktis x_0 lokaalne ekstreemum, siis x_0 on funktsiooni $f(x)$ kriitiline punkt, st mujal kui kriitilises punktis funktsioonil lokaalset ekstreemumit olla ei saa.

See tingimus on ekstreemumi olemasoluks tarvilik, kuid mitte piisav. Funktsiooni $y = x^3$ tuletis $y' = 3x^2$ võrdub nulliga, kui $x = 0$, st $x = 0$ on funktisooni $y = x^3$ kriitiline punkt, kuid sellel funktsioonil punktis $x = 0$ ekstreemumit ei ole.

Teoreem 2. Olgu x_0 funktsiooni $f(x)$ kriitiline punkt ja olgu funktsioon diferentseeruv x_0 ümbruses $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. Siis kehtivad väited.

1) Kui x_0 vasakpoolses ümbruses $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ on $f'(x) > 0$ ja parempoolses ümbruses $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ on $f'(x) < 0$, siis funktsioonil $f(x)$ on punktis x_0 lokaalne maksimum.

2) Kui x_0 vasakpoolses ümbruses $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ on $f'(x) < 0$ ja parempoolses ümbruses $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ on $f'(x) > 0$, siis funktsioonil $f(x)$ on punktis x_0 lokaalne miinimum.

3) Kui x_0 vasakpoolses ümbruses $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ on $f'(x) > 0$ ja parempoolses ümbruses $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ on $f'(x) > 0$, siis funktsioon $f(x)$ on punktis x_0 kasvav.

4) Kui x_0 vasakpoolses ümbruses $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ on $f'(x) < 0$ ja parempoolses ümbruses $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ on $f'(x) < 0$, siis funktsioon $f(x)$ on punktis x_0 kahanev.

Tõestame teoreemis 2 esitatud väidetest esimese ja kolmanda.

1. väite tõestus. Fikseerime x_0 parempoolses ümbruses punkti $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$. Lõigul $[x_0; x]$ on täidetud Lagrange'i teoreemi eeldused, st funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[x_0; x]$ ja diferentseeruv vahemikus $(x_0; x)$. Lagrange'i teoreemi järgi leidub selline $\xi \in (x_0; x)$, et

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Eelduse kohaselt $f'(\xi) < 0$ ja x valiku tõttu $x - x_0 > 0$. Korrutis $f'(\xi)(x - x_0) < 0$, seega $f(x) < f(x_0)$.

Fikseerime x_0 vasakpoolses ümbruses punkti $x \in (x_0-\varepsilon; x_0)$. Lõigul $[x; x_0]$ on täidetud Lagrange'i teoreemi eeldused. Järelikult leidub selline $\xi \in (x; x_0)$, et

$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x).$$

Eelduse kohaselt $f'(\xi) > 0$ ja x valiku tõttu $x_0 - x > 0$. Korrutis $f'(\xi)(x - x_0) > 0$, seega $f(x_0) > f(x)$.

Iga fikseeritud $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ korral on täidetud tingimus $f(x) < f(x_0)$, st funktisoonil on kriitilises punktis x_0 lokaalne maksimum.

3. väite tõestus. Fikseerime x_0 parempoolses ümbruses punkti $x \in (x_0; x_0+\varepsilon)$. Lõigul $[x_0; x]$ on täidetud Lagrange'i teoreemi eeldused. Seega leidub selline $\xi \in (x_0; x)$, et

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Eelduse kohaselt $f'(\xi) > 0$ ja x valiku tõttu $x - x_0 > 0$. Korrutis $f'(\xi)(x - x_0) > 0$, seega $f(x) > f(x_0)$.

Fikseerime x_0 vasakpoolses ümbruses punkti $x \in (x_0-\varepsilon; x_0)$. Lõigul $[x; x_0]$ on täidetud Lagrange'i teoreemi eeldused, st leidub selline $\xi \in (x; x_0)$, et

$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x).$$

Eelduse kohaselt $f'(\xi) > 0$ ja x valiku tõttu $x_0 - x > 0$. Korrutis $f'(\xi)(x - x_0) > 0$, seega $f(x_0) > f(x)$.

Seega iga $x > x_0$ korral $f(x) > f(x_0)$ ja iga $x < x_0$ korral $f(x) < f(x_0)$, st funktsioon on punktis x_0 kasvav. 3. väide on tõestatud.

Olgu x_0 funktsiooni $f(x)$ kriitiline punkt. Koondame teoreemi 2 väited tabelisse.

$x < x_0$	$x > x_0$	järeldus
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	funktsioonil $f(x)$ on punktis x_0 lokaalne maksimum
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	funktsioonil $f(x)$ on punktis x_0 lokaalne miinimum
$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	funktsioon on punktis x_0 kasvav
$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	funktsioon on punktis x_0 kahanev

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$ lokaalsed ekstreemumid.

Esiteks paneme tähele, et funktsiooni määramispiirkonna moodustavad kõik reaalarvud. Leiame

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + (x - 1) \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{3x + 2(x - 1)}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{5x - 2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

Siit saame, et $y' = 0$, kui $5x - 2 = 0$, st $x = \dfrac{2}{5}$ ja y' ei eksisteeri, kui $x = 0$. Kriitilised punktid on $x_1 = 0$ ja $x_2 = \dfrac{2}{5}$.

Kui $x < 0$, siis $5x - 2 < 0$ ja $\sqrt[3]{x} < 0$, järelikult $y' > 0$.

Kui $0 < x < \frac{2}{5}$, siis $5x - 2 < 0$ ja $\sqrt[3]{x} > 0$, seega $y' < 0$.

Kui $x > \frac{2}{5}$, siis $5x - 2 > 0$ ja $\sqrt[3]{x} > 0$, st $y' > 0$.

Et kriitilisest punktist $x_1 = 0$ vasakul on $y' > 0$ ja paremal $y' < 0$, siis on funktsioonil kriitilises punktis lokaalne maksimum.

Kriitilisest punktist $x_2 = \frac{2}{5}$ vasakul on $y' < 0$ ja paremal $y' > 0$. Seega selles kriitilises punktis on funktsioonil lokaalne miinimum.

3.10 Funktsiooni ekstreemumi liigi uurumine teise tuletise abil

Olgu x_0 funktsiooni $f(x)$ statsionaarne punkt, st $f'(x_0) = 0$.

Teoreem. Olgu $f''(x)$ on määratud ja pidev statsionaarse punkti x_0 mingis ümbruses. Kui $f''(x_0) < 0$, siis on funktsioonil $f(x)$ punktis x_0 lokaalne maksimum ja kui $f''(x_0) > 0$, siis on funktsioonil $f(x)$ punktis x_0 lokaalne miinimum.

Tõestus. Kui $f''(x_0) < 0$, siis pidevuse tõttu $f''(x) < 0$ ka punkti x_0 mingis ümbruses, st selles ümruses on funktsioon $f'(x)$ kahanev. Eelduse kohaselt $f'(x_0) = 0$, seega kui $x < x_0$, siis $f'(x_0) > 0$ ja kui $x > x_0$, siis $f'(x_0) < 0$. Eelmise punkti teoreem 2 järgi on funktsioonil $f(x)$ statsionaarses punktis lokaalne maksimum.

Teoreemi teine väide tõestatakse analoogiliselt.

Näide. Leiame funktsiooni $y = 2\sin x + \cos 2x$ lokaalsed ekstreemumid.

Kõigepealt leiame $y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$. Statsionaarsed punktid saame võrrandist

$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0.$$

Kui $2\cos x = 0$, siis $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Kui $1 - 2\sin x = 0$, st $\sin x = \frac{1}{2}$, siis $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Kokku saime kaks stationaarsete punktide hulka.

Edasi leiame $y'' = -2\sin x - 4\cos 2x$. Arvutades selle väärtuse punktides $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ saame, et $y'' = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - 4\cos 2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$.

Arvestades sellega, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$ ja $\cos(\pi + 2n\pi) = \cos\pi = -1$, on $y''\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = -2(-1)^n + 4 > 0$ iga $n \in \mathbb{Z}$ korral. Järelikult punktides $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$ on antud funktsioonil lokaalne miinimum.

Punktides $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ saame, et

$$\begin{aligned} y'' &= -2\sin\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi\right) - 4\cos 2\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi\right) \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} - 4\cos\left((-1)^n \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = -1 - 4\cos\left((-1)^n \frac{\pi}{3}\right) = -1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3. \end{aligned}$$

Järelikult on antud funktsioonil punktides $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ lokaalne maksimum.

3.11 Funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud lõigul

Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev lõigul $[a; b]$. Suurima ja vähima väärtuse leidmine tugineb kahel faktil.

1. Lõigul pidev funktsioon omab suurimat ja vähimat väärtust sellel lõigul.

2. Lõigul pidev funktsioon omandab suurima ja vähima väärtuse kas kriitilises punktis (st punktis, kus funktsioonil võib olla lokaalne ekstreemum) või lõigu otspunktis.

Nendest kahest väitest tuleneb eeskiri funktsiooni $y = f(x)$ suurima ja vähima väärtuse leidmiseks lõigul $[a; b]$.

1. Leiame funktsiooni $y = f(x)$ lõiku $[a; b]$ kuuluvad kriitilised punktid x_1, x_2, ... ja arvutame nendes funktsiooni väärtused $f(x_1)$, $f(x_2)$, ...

2. Arvutame funktsiooni väärtused lõigu otspunktides $f(a)$ ja $f(b)$.

3. Leitud väärtuste hulgast valime suurima y_{max} ja vähima y_{min}.

Näide. Leiame funktsiooni $y = x^3 - 3x$ suurima ja vähima väärtuse lõigul $[-2; 2]$.

Siin $y' = 3x^2 - 3$ ja kriitilised punktid saame võrrandist $3x^2 - 3 = 0$, millest $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$. Funtsiooni väärtused kriitilistes punktides on $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ ja $f(1) = 1 - 3 = -2$. Funktsiooni väärtused lõigu otspunktides $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) = -2$ ja $f(2) = 2$. Seega

$$y_{max} = y(-1) = y(2) = 2$$

ja

$$y_{min} = y(-2) = y(1) = -2.$$

3.12 Funktsiooni graafiku kumerus ja nõgusus. Käänupunktid

Definitsioon 1. Funktsiooni graafikut nimetatakse *kumeraks* piirkonnas X, kui ükski selles piirkonnas graafikule tõmmatud puutuja ei ole graafikust allpool.

Definitsioon 2. Funktsiooni graafikut nimetatakse *nõgusaks* piirkonnas X, kui ükski selles piirkonnas graafikule tõmmatud puutuja ei ole graafikust ülalpool.

Definitsioon 3. Funktsiooni graafiku *käänupunktiks* nimetatakse punkti, mis eraldab kumeruspiirkonda nõgususpiirkonnast.

Järeldus definitsioonidest. Käänupunktis graafiku puutuja lõikab graafikut, sest ühel pool käänupunkti ei ole puutuja graafikust allpool ja teisel pool puutujast ülalpool.

Funktsiooni graafiku kumeruspiirkonda tähistatakse sümboliga $\hat{X}$ ja nõgususpiirkonda sümboliga $\breve{X}$.

Teoreem 1. Olgu pideval funktsioonil $y = f(x)$ piirkonnas X pidevad esimest ja teist järku tuletised. Kui $f''(x) < 0$ piirkonnas X, siis on funktsiooni graafik selles piirkonnas kumer.

Tõestus. Olgu piirkonnas X funktsiooni graafikule tõmmatud puutuja punktis $P_0(x_0; f(x_0))$. Fikseerime piirkonnas X veel ühe punkti $x \neq x_0$. Tähistame sellele x väärtusele vastava ordinaadi puutujal $\bar{y}$, st $\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Siis

$$\bar{y} - f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f(x) = -[f(x) - f(x_0)] + f'(x_0)(x - x_0).$$

Lõigul $[x_0; x]$ on täidetud kõik Lagrange'i teoreemi eeldused, st leidub selline $\bar{x} \in (x_0; x)$, et $f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0)$. Seega

$$\bar{y} - f(x) = -f'(\bar{x})(x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -(x - x_0)(f'(\bar{x}) - f'(x_0)).$$

Ka funktsiooni $f'(x)$ jaoks on lõigul $[x_0; \bar{x}]$ Lagrange'i teoreemi eeldused täidetud, st leidub selline $\xi \in (x_0; \bar{x})$, et $f'(\bar{x}) - f'(x_0) = f''(\xi)(\bar{x} - x_0)$. Järelikult

$$\bar{y} - f(x) = -f''(\xi)(x - x_0)(\bar{x} - x_0).$$

Kui $x > x_0$, siis $x - x_0 > 0$ ja et $x_0 < \bar{x} < x$, siis ka $\bar{x} - x_0 > 0$ ja $(x - x_0)(\bar{x} - x_0) > 0$. Kasutades eeldust $f''(x) < 0$, saame, et $\bar{y} - f(x) > 0$ ehk $\bar{y} > f(x)$

Kui $x < x_0$, siis $x - x_0 < 0$ ja $x < \bar{x} < x_0$ tõttu ka $\bar{x} - x_0 < 0$. Korrutis $(x - x_0)(\bar{x} - x_0) > 0$, seega $\bar{y} > f(x)$.

Seega mis tahes puutepunkti abstsissist x_0 erinevale $x \in X$ väärtusele vastav ordinaat puutujal on suurem kui graafiku punkti ordinaat, st puutuja punkt on kõrgemal kui graafiku punkt. Definitsiooni kohaselt on graafik kumer.

Analoogilise viisil tõestatakse.

Teoreem 2. Olgu pideval funktsioonil $y = f(x)$ piirkonnas X pidevad esimest ja teist järku tuletised. Kui $f''(x) > 0$ piirkonnas X, siis on funktsiooni graafik selles piirkonnas nõgus.

Teoreem 3. Kui $f''(x_0) = 0$ või $f''(x_0)$ ei eksisteeri ja $f''(x)$ muudab punktis x_0 märki, siis on funktsiooni graafikul punktis abstsissiga x_0 käänupunkt.

Näide. Leiame funktsiooni $y = e^{-x^2}$ graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

Leiame $y' = -2xe^{-x^2}$ ja $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

Et $2e^{-x^2} > 0$, saame teise tuletise nullkohad võrrandist $2x^2 - 1 = 0$, millest $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ja $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Kumeruspiirkonna leiame võrratusest $2x^2 - 1 < 0$, millest $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Nõgususpiirkonna leiame võrratusest $2x^2 - 1 > 0$, millest $x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ või $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Teist jäku tuletis muudab märki mõlema leitud x väärtuse korral. Kui $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, siis $y = e^{-\frac{1}{2}}$. Kui $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, siis $y = e^{-\frac{1}{2}}$.

Seega on funktsiooni graafiku kümeruspiirkond $\hat{X} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, nõgususpiirkond $\check{X} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$ ja käänupunktid $K_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ning $K_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

3.13 Funktsiooni graafiku asümptoodid

Olgu O koordinaatide alguspunkt ja $M(x; y)$ funktsiooni $y = f(x)$ graafiku punkt.

Definitsioon 1. Öeldakse, et funktsiooni graafiku punkt liigub lõpmatusse, kui vektori $\overrightarrow{OM}$ pikkus tõkestamatult kasvab, st $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$.

Definitsioon 2. Sirget nimetetakse funktsiooni graafiku asümptoodiks, kui graafiku punkti liikumisel lõpmatusse selle punkti kaugus sirgest on lõpmatult kahanev suurus.

Graaafiku asümptoodid jaotatakse vertikaalasümptootideks ja kaldasümptootideks.

Vertikaalse sirge võrrandiks on $x = a$. See sirge on funktsiooni graafiku vertikaalasümptoodiks, kui graafiku punkti $M(x; y)$ liikumisel lõpmatusse, selle kaugus sirgest on lõmatult kahanev suurus, st $\lim\limits_{|\overrightarrow{OM}| \to \infty} |x - a| = 0$.

Võrdused $\lim\limits_{|\overrightarrow{OM}|\to\infty} |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2} = \lim\limits_{|\overrightarrow{OM}|\to\infty} \sqrt{a^2+y^2} = \infty$ on võimalikud ainult siis, kui $\lim |y| = \infty$.

Järelikult on sirge $x = a$ funktsiooni $y = f(x)$ graafiku vertikaalasümptoodiks, kui

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

või

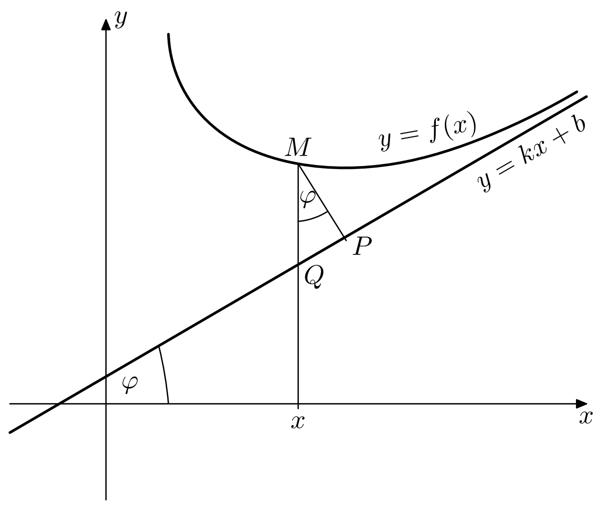
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$$

Kui asümptoodiks olev sirge ei ole vertikaalne, siis selle tõusunurk $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, sirge tõus $k = \tan\varphi$ on lõplik suurus ja kaldasümptoodi võrrand on $y = kx+b$. Tuletame valemid sirge tõusu ja algordinaadi määramiseks funktsiooni $y = f(x)$ järgi.

Kui funktsiooni $y = f(x)$ graafiku punkti $M(x; y)$ liikumisel lõpmatusse punkti kaugus sirgest $y = kx + b$ on lõpmatult kahanev suurus, siis $|x| \to \infty$ (vastasel korral on tegemist vertikaalasümptoodiga).

Olgu M funktsiooni graafiku punkt (joonis 3.3) ja punkti kaugus sirgest $y = kx+b$ lõigu MP pikkus. Eelduse kohaselt on sirge $y = kx+b$ funktsiooni $y = f(x)$ graafiku asümptoodiks, seega definitsiooni 2 kohaselt

$$\lim_{|x|\to\infty} MP = 0. \tag{3.16}$$



Joonis 3.3: funktsiooni graafiku kaldasümptoot

Ilmselt $\angle PMQ = \varphi$ (vastavalt ristuvate haaradega nurgad). Et $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$, siis $\cos\varphi \neq 0$ ja võrduse $MP = MQ \cdot \cos\varphi$ tõttu järeldub tingimusest (3.16), et $\lim\limits_{|x|\to\infty} MQ = 0$.

Aga $MQ = |f(x) - (kx + b)|$. Seega

$$\lim_{|x|\to\infty} (f(x) - kx - b) = 0. \tag{3.17}$$

ehk

$$\lim_{|x|\to\infty} \left[x \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) \right] = 0.$$

Et $|x| \to \infty$, siis viimane tingimus on täidetud ainult juhul, kui

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0.$$

Võrduse $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ tõttu saame viimasest tingimusest, et

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0,$$

millest

$$k = \lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{3.18}$$

Võrduset (3.17) saame, et

$$b = \lim_{|x|\to\infty} (f(x) - kx). \tag{3.19}$$

Sõnastame tulemuse teoreemina.

Teoreem. Sirge $y = kx + b$ on funktsiooni $y = f(x)$ graafiku kaldasümptoodiks parajasti siis, kui eksisteerivad valemites (3.18) ja (3.19) esinevad piirväärtused ja parameetrid k ja b on arvutatavad vastavalt valemite (3.18) ja (3.19) põhjal.

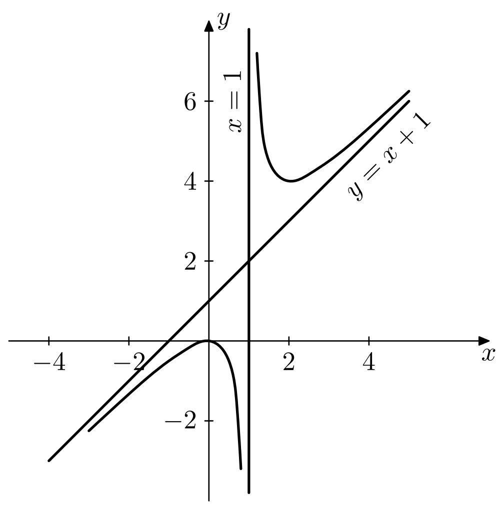
Näide. Leiame funktsiooni $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ graafiku asümptoodid.

Funktsioon on katkev punktis $x = 1$. Arvutades ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

ja

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$



Joonis 3.4: funktsiooni $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ graafik ja selle asümptoodid

saame, et sirge $x = 1$ on antud funktsiooni graafiku vertikaalasümptoodiks.

Leiame valemi (3.18) abil kaldasümptoodi tõusu

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} : x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

ja valemi (3.19) abil algordinaadi

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Antud funktsiooni kaldasümptoodiks on seega sirge $y = x + 1$.

Funktsiooni $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ graafik ja selle asümptoodid on esitatud joonisel 3.4.